Topologia
Lista 6

Zad 1. Pokazać, że przestrzeń dyskretna (X, τ) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór X jest skończony.

Zad 2. Rozważmy odcinek $X = [0, 1]$ z topologią $\tau = \{\emptyset, X, (0, 1), \{1\}, (0, 1]\}$. Czy jest to przestrzeń zwarta?

Zad 3. Czy przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z *metryką kolejową* (zwaną też *metryką studnia*)

$$d(p, q) = \begin{cases} d_e(p, q), & \text{gdy } p \text{ i } q \text{ leżą na tej samej prostej} \\ & \text{przechodzącej przez punkt } (0, 0), \\ d_e(p, (0, 0)) + d_e(q, (0, 0)), & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

gdzie d_e jest metryką euklidesową, jest zwarta?

Zad 4. Czy przestrzeń $X = [0, 1]$ z topologią indukowaną z $\mathbb{R}_l$ jest zwarta?

Zad 5. Czy następujące podprzestrzenie płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = (1 - \frac{1}{e^t}) \cos t, y = (1 - \frac{1}{e^t} \sin t,\ t \in [0, \infty),\ \text{lub } x^2 + y^2 = 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = (1 + e^t) \cos t, y = (1 + e^t \sin t,\ t \in [0, \infty),\ \text{lub } x^2 + y^2 = 1\}$$

są homeomorficzne?

Zad 6. Dowieść, że w przestrzeni euklidesowej kula otwarta nie jest homeomorficzna z kulą domkniętą.

Zad 7. Twierdzenie Cantora mówi, że jeżeli $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset ...$ jest zstępującą rodziną domkniętych podzbiorów zwartej przestrzeni X, to

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

Pokazać na przykładzie, że założenia o zwartości przestrzeni X w tezie tego twierdzenia nie można opuścić.

Zad 8. Niech S^1 będzie okręgiem, zaś Y torusem bez jednego punktu. Czy te przestrzenie są homeomorficzne? Czy istnieją ciągłe przekształcenia jednej przestrzeni na drugą?

Zad 9. Pokazać, że na zbiorze X nie istnieją dwie różne, porównywalne topologie zadające na X strukturę przestrzeni zwartej.

Zad 10. Niech $A \subset X$, $B \subset Y$ będą zwartymi podprzestrzeniami przestrzeni topologicznych X, Y. Udowodnić, że jeśli istnieje otwarty podzbiór $W \subset X \times Y$ zawierający $A \times B$, to istnieją zbiory otwarte $U \subset X$, $V \subset Y$ takie, że $A \times B \subset U \times V \subset X \times Y$.

Zad 11. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a Y przestrzenią zwartą. Wykazać, że rzut $p : X \times Y \to X$:

$$p(x, y) = x, \qquad x \in X,\ y \in Y,$$

jest odwzorowaniem domkniętym, tj. przekształca zbiory domknięte na zbiory domknięte.

Zad 12. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a Y przestrzenią zwartą. Wykazać, że odwzorowanie $f : X \times Y$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy jego wykres

$$W = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\},$$

jest zbiorem domkniętym w $X \times Y$.